连续时间傅里叶级数性质

性质	周期信号	傅里叶级数系数
	$\left.\begin{matrix}\mathrm{x(t)}\\ \mathrm{y(t)}\end{matrix}\right\}$ 周期为T，基本频率$\omega_0=\frac{2\pi}{T}$	a_k b_k
线性	$Ax(t)+By(t)$	Aa_k+Bb_k
时移	$x(t-t_0)$	$a_k e^{jk\omega_0 t_0}=a_k e^{-jk(\frac{2\pi}{T})t_0}$
频移	$e^{jM\omega_0 t}x(t)=e^{jM(\frac{2\pi}{T})t}x(t)$	a_{k-M}
共轭	$x^*(t)$	a^*_{-k}
时间反转	$x(-t)$	a_{-k}
时间尺度变换	$x(\alpha t)$，$\alpha>0$（周期为$\frac{T}{\alpha}$）	a_k
周期卷积	$\int_T x(\tau)y(t-\tau)\mathrm{d}\tau$	$Ta_k b_k$
相乘	$x(t)y(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l b_{k-l}$
微分	$\frac{dx(t)}{dt}$	$jk\omega_0 a_k=jk\frac{2\pi}{T}a_k$
积分	$\int_{-\infty}^{t} x(t)\mathrm{d}t$（仅当$a_0=0$才为有限值且为周期的）	$\left(\frac{1}{jk\omega_0}\right)a_k=\left(\frac{1}{jk(2\pi/T)}\right)a_k$
实信号的共轭对称性	$x(t)$为实信号	$\begin{cases}a_k=a^*_{-k}\\ Re\{a_k\}=Re\{a_{-k}\}\\ Im\{a_k\}=-Im\{a_{-k}\}\\ \|a_k\|=\|a_{-k}\|\\ \sphericalangle a_k=-\sphericalangle a_{-k}\end{cases}$
实偶信号	$x(t)$为实偶信号	a_k为实偶信号
实奇信号	$x(t)$为实奇信号	a_k为纯虚奇函数
实信号的奇偶分解	$\begin{cases}x_e(t)=Ev\{x(t)\}，[x(t)为实信号]\\ x_o(t)=Od\{x(t)\}，[x(t)为实信号]\end{cases}$	$Re\{a_k\}$ $jIm\{a_k\}$

周期信号的帕斯瓦尔定理
$\frac{1}{T}\int_T \|x(t)\|^2\mathrm{d}t=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\|a_k\|^2$

离散时间傅里叶级数性质

性质	周期信号	傅里叶级数系数
	$\left.\begin{matrix}\mathrm{x}[\mathrm{n}] \\ \mathrm{y}[\mathrm{n}]\end{matrix}\right\}$周期为$T$，基本频率$\omega_0=\frac{2\pi}{N}$	$\left.\begin{matrix}a_k \\ b_k\end{matrix}\right\}$周期的，周期为$N$
线性	$Ax[n]+By[n]$	Aa_k+Bb_k
时移	$x[n-n_0]$	$a_k e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n_0}$
频移	$e^{jM(\frac{2\pi}{N})n}x[n]$	a_{k-M}
共轭	$x^*[n]$	a_{-k}^*
时间反转	$x([-n]$	a_{-k}
时间尺度变换	$x_{(m)}[n]=\begin{cases}x[n/m]，若n是m的倍数 \\ 0，若n不是m的倍数\end{cases}$	$\frac{1}{m}a_k$（看成周期的，周期为mN）
周期卷积	$\sum_{r=\langle N\rangle}x[r]y[n-r]$	Na_kb_k
相乘	$x[n]y[n]$	$\sum_{l=\langle N\rangle}a_lb_{k-l}$
一阶差分	$x[n]-x[n-1]$	$(1-e^{jk(2\pi/N)})a_k$
求和	$\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$（仅当$a_0=0$才为有限值且为周期的）	$\left(\frac{1}{1-e^{jk(2\pi/N)}}\right)a_k$
实信号的共轭对称性	$x[n]$为实信号	$\begin{cases}a_k=a_{-k}^* \\ Re\{a_k\}=Re\{a_{-k}\} \\ Im\{a_k\}=-Im\{a_{-k}\} \\ \mid a_k\mid=\mid a_{-k}\mid \\ \sphericalangle a_k=-\sphericalangle a_{-k}\end{cases}$
实偶信号	$x[n]$为实偶信号	a_k为实偶信号
实奇信号	$x[n]$为实奇信号	a_k为纯虚奇函数
实信号的奇偶分解	$\begin{cases}x_e[n]=Ev\{x[n]\}，[x[n]为实信号] \\ x_o[n]=Od\{x[n]\}，[x[n]为实信号]\end{cases}$	$Re\{a_k\}$ $jIm\{a_k\}$

周期信号的帕斯瓦尔定理
$\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}\mid x[n]\mid^2\mathrm{dt}=\sum_{n=\langle N\rangle}\mid a_k\mid^2$

傅里叶变换性质

性质	非周期信号	傅里叶变换
	$x(t)$ $y(t)$	$X(j\omega)$ $Y(j\omega)$
线性	$ax(t)+by(t)$	$aX(j\omega)+bY(j\omega)$
时移	$x(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}X(j\omega)$
频移	$e^{j\omega_0 t}x(t)$	$X(k(\omega-\omega_0))$
共轭	$x^*(t)$	$X^*(-j\omega)$
时间反转	$x(-t)$	$X(-j\omega)$
时间与频率尺度变换	$x(at)$	$\frac{1}{\|a\|}X(\frac{j\omega}{a})$
卷积	$x(t)*y(t)$	$X(j\omega)Y(j\omega)$
相乘	$x(t)y(t)$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(j\theta)Y(j(\omega-\theta))\mathrm{d}\theta$
时域微分	$\frac{d}{dt}x(t)$	$j\omega X(j\omega)$
积分	$\int_{-\infty}^{t}x(t)\mathrm{d}t$	$\frac{1}{j\omega}X(j\omega)+\pi X(0)\sigma(\omega)$
频域微分	$tx(t)$	$\frac{1}{j\omega}+\pi X(0)\sigma(\omega)$
实信号的共轭对称性	$x(t)$为实信号	$\begin{cases} X(j\omega)=X^*(-j\omega) \\ Re\{X(j\omega)\}=Re\{X(-j\omega)\} \\ Im\{X(j\omega)\}=-Im\{X(-j\omega)\} \\ \|X(j\omega)\|=\|X(-j\omega)\| \\ \sphericalangle X(j\omega)=-\sphericalangle X(j\omega) \end{cases}$
实偶信号的对称性	$x(t)$为实偶信号	$X(j\omega)$为实偶
实奇信号的对称性	$x(t)$为实奇信号	$X(j\omega)$为纯虚数
实信号的奇偶分解	$x_e(t)=Ev\{x(t)\}$, $[x(t)$为实信号$]$ $x_o(t)=Od\{x(t)\}$, $[x(t)$为实信号$]$	$Re\{X(j\omega)\}$ $jIm\{X(j\omega)\}$

非周期信号的帕斯瓦尔定理
$\int_{-\infty}^{+\infty}\|x(t)\|^2\ \mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\|X(j\omega)\|^2\ \mathrm{d}\omega$

基本傅里叶变换对

信号	傅里叶变换	傅里叶级数系数（若为周期的）
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \sigma(\omega - k\omega_0)$	a_k
$e^{jk\omega_0 t}$	$2\pi\sigma(\omega - k\omega_0)$	$a_1 = 1$ $a_k = 0$，其余k
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi[\sigma(\omega-\omega_0)+\sigma(\omega+\omega_0)]$	$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}$ $a_k = 0$，其余k
$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\pi}{j}[\sigma(\omega-\omega_0)-\sigma(\omega+\omega_0)]$	$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2j}$ $a_k = 0$，其余k
$x(t) = 1$	$2\pi\sigma(\omega)$	$a_0 = 1$，$a_k = 0$，$k \neq 0$ 这是对任意$T > 0$选择的傅里叶级数表示
周期方波 $x(t) = \begin{cases} 1, & \lvert t \rvert < T_1 \\ 0, & T_1 < \lvert t \rvert \le \frac{T}{2} \end{cases}$ $x(t+T) = x(t)$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k} \sigma(\omega - k\omega_0)$	$\frac{\omega_0 T_1}{\pi} sinc\left(\frac{k\omega_0 T_1}{\pi}\right) = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}$
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sigma(t - nT)$	$\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sigma\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$	$a_k = \frac{1}{T}$，对全部k
$x(t) = \begin{cases} 1, & \lvert t \rvert < T_1 \\ 0, & \lvert t \rvert > T_1 \end{cases}$	$\frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}$	—
$\frac{\sin(Wt)}{\pi t}$	$X(j\omega) = \begin{cases} 1, & \lvert \omega \rvert < W \\ 0, & \lvert \omega \rvert > W \end{cases}$	—
$\sigma(t)$	1	—
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\omega(\omega)$	—
$\sigma(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$	—
$e^{-at}u(t)$，$Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{a+j\omega}$	—
$te^{-at}u(t)$，$Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a+j\omega)^2}$	—
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)$，$Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a+j\omega)^n}$	—

拉普拉斯变换性质

性质	信号	拉普拉斯变换	收敛域
	$x(t)$ $x_1(t)$ $x_2(t)$	$X(s)$ $X_1(s)$ $X_2(s)$	R R_1 R_2
线性	$ax_1(t)+bx_2(t)$	$aX_1(s)+bX_2(s)$	至少 $R_1 \bigcap R_2$
时移	$x(t-t_0)$	$e^{-st_0}X(s)$	R
s域平移	$e^{s_0t}x(t)$	$X(s-s_0)$	R的平移，即若$(s-s_0)$在R中，则s就位于收敛域中
时域尺度变换	$x(at)$	$\frac{1}{\|a\|}X\left(\frac{s}{a}\right)$	R/a，即若s/a在R中，则s就位于收敛域中
共轭	$x^*(t)$	$X^*(s^*)$	R
卷积	$x_1(t)*x_2(t)$	$X_1(s)*X_2(s)$	至少 $R_1 \bigcap R_2$
时域微分	$\frac{d}{dt}x(t)$	$sX(s)$	至少 R
时域微分（单边）	$\frac{d}{dt}x(t)$	$sX(s)-x(0^-)$	
s域微分	$-tx(t)$	$\frac{d}{ds}X(s)$	R
时域积分	$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\mathrm{d}(\tau)$	$\frac{1}{s}X(s)$	至少 $R_1 \bigcap Re\{s\}>0$

初值定理和终值定理
若$t<0$，$x(t)=0$且在$t=0$不包任何冲激或高阶奇异函数，则 $x(0^+)=\lim_{s\to\infty}sX(s)$ $\lim_{t\to\infty}x(t)=\lim_{t\to 0}sX(s)$

基本函数的拉普拉斯变换对

信号	拉普拉斯变换	收敛域
$\sigma(t)$	1	全部 s
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$Re\{s\} > 0$
$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$Re\{s\} < 0$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)$	$\frac{1}{s^n}$	$Re\{s\} > 0$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(-t)$	$\frac{1}{s^n}$	$Re\{s\} < 0$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$Re\{s\} > -a$
$-e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$Re\{s\} < -a$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$Re\{s\} > -a$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$Re\{s\} < -a$
$\sigma(t-T)$	e^{-sT}	全部 s
$[\cos(\omega_0 t)]u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$Re\{s\} > 0$
$[\sin(\omega_0 t)]u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$Re\{s\} > 0$
$[e^{-at}\cos(\omega_0 t)]u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$Re\{s\} > -a$
$[e^{-at}\cos(\omega_0 t)]u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega^2}$	$Re\{s\} > -a$
$u_n(t) = \frac{d^n\sigma(t)}{dt^n}$	s^n	全部 s
$u_{-n}(t) = \underbrace{u(t) * \cdots * u(t)}_{\text{n次}}$	$\frac{1}{s^n}$	$Re\{s\} > 0$